



**OLIMPIÁDA JUVENIL DE MATEMÁTICA**  
**Final Nacional — 22 de junio de 2024**  
**Quinto Año**

**Duración de la prueba:** 3 horas y media

**Valor de cada problema:** 7 puntos

**Todas las respuestas deben justificarse.**

**Problema 1.** Halle un entero positivo  $n$  y un número primo  $p$  tales que  $1 + 211p = n^3$ .

**Problema 2.** Si  $a$  y  $b$  son dos enteros positivos, diremos que  $f(a, b) = 1$  si  $ab + 1$  es un cuadrado perfecto. Por ejemplo,  $f(3, 8) = 1$  pues  $3 \cdot 8 + 1 = 25 = 5^2$ . Si  $ab + 1$  no es un cuadrado perfecto, pero existe un entero positivo  $r$  tal que  $f(a, r) = 1$  y  $f(r, b) = 1$ , entonces diremos que  $f(a, b) = 2$ . Si  $f(a, b)$  no es 1 ni 2, pero existen enteros positivos  $r$  y  $s$  tales que  $f(a, r) = f(r, s) = f(s, b) = 1$ , diremos que  $f(a, b) = 3$ , y así sucesivamente.

a) Pruebe que para todo entero positivo  $n$  se cumple  $f(n, n + 2) = 1$ .

b) ¿Cuánto es  $f(1, 2)$ ?

c) ¿Cuánto es  $f(1, 4)$ ?

**Problema 3.** Ocho ajedrecistas juegan en un torneo, en el cual cada par de ellos debe enfrentarse una y solo una vez. En cierto momento se comprueba que si se toman cinco jugadores cualesquiera (del total de ocho), entonces hay al menos dos de ellos que aun no se han enfrentado. ¿Cuál es el máximo número de partidas que se pueden haber jugado hasta ese momento?

**Problema 4.** En un rectángulo cuyos lados miden 64 cm y 50 cm se inscriben dos circunferencias de igual radio. Las circunferencias son tangentes entre sí, y cada una de ellas es tangente a dos lados del rectángulo, como muestra la figura. ¿Cuál es el radio de las circunferencias?

