

OLIMPIÁDA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Final Nacional — 17 de junio de 2023
Quinto Año

Duración de la prueba: 3 horas y media

Valor de cada problema: 7 puntos

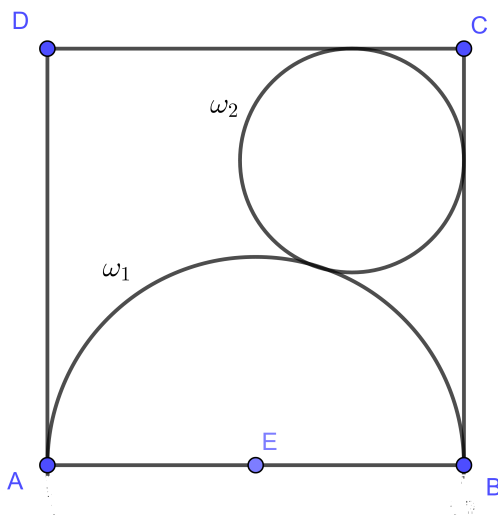
Todas las respuestas deben justificarse.

Problema 1. Halle todas las soluciones reales de la ecuación

$$2^x = \sqrt{9 \cdot 2^{x+2} - 128}.$$

Problema 2. Halle el menor entero positivo n tal que la suma de los dígitos de n y la suma de los dígitos de $n + 1$ sean, ambas, múltiplos de 13.

Problema 3. $ABCD$ es un cuadrado de lado 2 cm. ω_1 es una semicircunferencia con diámetro AB . ω_2 es una circunferencia tangente a ω_1 y a los lados BC y CD del cuadrado. Halle el radio de ω_2 .



Problema 4. Sea f una función tal que, si a , b y n son enteros positivos y $a + b = 2^n$, entonces $f(a) + f(b) = n^2$.

Halle el valor de $f(2023)$.