

OLIMPIÁDA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Final Nacional — 2 de julio de 2022
Quinto Año

Apellidos y Nombres: _____ N° de Cédula: _____

Instituto: _____ Ciudad: _____ Estado: _____

(No escriba en esta línea) Puntos: 1 _____ 2 _____ 3 _____ 4 _____ Total: _____

Todas las respuestas deben justificarse.

Duración de la prueba: 3 horas y media

Valor de cada problema: 7 puntos

Problema 1. Sean u , v y w números reales tales que

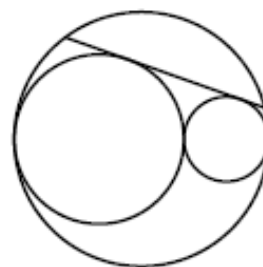
$$3^u = 5, \quad 4^v = 9, \quad 5^w = 32.$$

Determine el valor del producto uvw .

Problema 2. En una pizarra está escrito el número 2. Ana y Beto juegan alternadamente, comenzando por Ana, a sustituir el número de la pizarra por otro mayor pero que no supere al triple del número. Por ejemplo Ana, al comenzar el juego, puede sustituir el 2 por 3, 4, 5 o 6. Ahora Beto deberá escribir un número mayor que el que escribió Ana pero que no supere a su triple, y así sucesivamente. El primero que escriba un número mayor o igual a 2022, pierde (y el otro jugador gana). Determine si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora, y descríbala.

Nota: Una *estrategia ganadora* es un método de juego que asegura la victoria del que lo emplea, independientemente de lo que haga el otro jugador.

Problema 3. Dos circunferencias de radios 3 y 6 son tangentes exteriormente, y ambas son tangentes interiormente a otra circunferencia de radio 9. Una cuerda de la circunferencia de radio 9 es tangente, en dos puntos diferentes, a las otras dos circunferencias. ¿Cuál es la longitud de esa cuerda?



Problema 4. A una reunión asisten 10 personas. Se sabe que, en cada posible grupo de tres de ellas, hay al menos dos que no se conocen. Demuestre que hay al menos cuatro personas que no se conocen entre sí.