

**OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA**  
**Final Nacional — 27 de junio de 2021**  
**Tercer Año**

**Duración de la prueba:** 3 horas y media

**Valor de cada problema:** 7 puntos

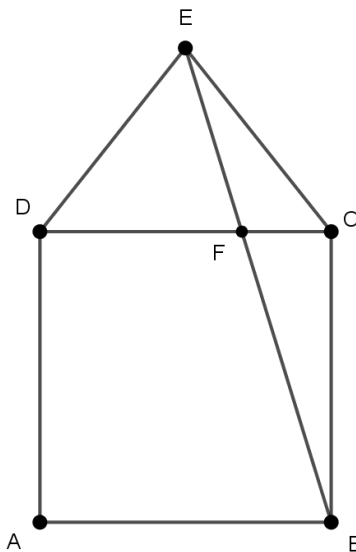
**Todas las respuestas deben justificarse.**

**Problema 1.** En una caja hay 12 pelotas de colores. Si se extraen cinco pelotas cualesquiera, al menos dos de ellas y como máximo tres son de un mismo color. Se sabe que al menos una de las pelotas es azul. Determine, si es posible, el número exacto de pelotas azules que hay en la caja.

**Problema 2.** Halle el mayor entero positivo formado por dígitos diferentes, con la propiedad de que el número formado por cada par de dígitos consecutivos sea primo.

Ejemplo: 3179 tiene la propiedad deseada, ya que 31, 17 y 79 son primos, pero no es el mayor posible.

**Problema 3.**  $ABCD$  es un cuadrado de 6 cm de lado.  $CDE$  es un triángulo de área  $12 \text{ cm}^2$ , con  $CE = DE$ .



Si  $F$  es el punto de intersección de  $CD$  y  $BD$ , ¿cuál es la longitud del segmento  $DF$ ?

**Problema 4.** Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x - xy + 3y &= 0, \\3x + 7xy - y &= 0.\end{aligned}$$